

# T Ü R E V



## KONU ANLATIMLI EĞİTİM SETİ

[www.oryinalyayinlari.com](http://www.oryinalyayinlari.com)



ORIJINAL MATEMATİK VIDEO ÇÖZÜM  
UYGULAMASINI  
İNDİR



VIDEOLAR CEBİNE  
GELSİN

@oryinalmatematik



youtube.com/ Orijinal Matematik  
Video Çözümler: MEHMET ŞÜKRÜ KARAKAYA

# AYT ORİJİNAL TÜREV FASİKÜLÜ

Copyright©

Bu kitabın her hakkı yayınevine aittir.

Hangi amaçla olursa olsun, bu kitabın tamamının ya da bir kısmının, kitabı yayımlayan ve yayınevinin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması, yayımlanması ve depolanması yasaktır.

## ISBN

978-605-06571-6-6

## Genel Yayın Koordinatörü

Zafer BALCI

## Yazarlar

Abdurrahim ŞAHİN

Hasan BOSTANLIK

Barış ALTAY

Zafer BALCI

## Editörler

Murat ÇEVİK

Fatih DAYI

## Redaksiyon

Buse UĞANTAŞ

## Dizgi ve Tasarım

Sefa Tuğrul ATASOY

Mert Oğuz COŞKUN

Şeyma Nur ÇETİN

statasoy@gmail.com

+90 505 563 53 48

## BASKI VE CİLT

Özyurt Matbaacılık

ANKARA

2022

1. Baskı



## İLETİŞİM

Ostim Mahallesi 1207. Sokak 3/C-D Ostim/Yenimahalle/ANKARA

Tel: (0312) 395 13 96 Fax: (0312) 394 10 04

## ÖN SÖZ

Sevgili Öğrenciler ve Değerli Meslektaşlarımız,

Orijinal Matematik Yayınları olarak idealleri olan her öğrencimize yol göstermek ve onların başarılarını artırmak için "Türev Konu Anlatımlı Eğitim Seti" adını verdiğimiz fasikülümüzü hazırladık.

Fasikülümüzde detaylı konu anlatımları, çözümlü örnekler, "Bir de Orijinalden Dinle!" adlı açık uçlu sorular ve kazanım testleri bulunmaktadır. Bölüm sonunda bir Orijinal Yayınları klasiği olan "ÖSYM Tarzı Testler" yer almaktadır.

Konu anlatımlarımız ve "Bir de Orijinalden Dinle!" açık uçlu sorularımız, Orijinal Matematik Youtube kanalında özel ders formatında izleyebileniz için hazırlanmıştır. Kazanım Testleri ve ÖSYM Tarzı Testlerimizin çözümlerini Orijinal Matematik video çözüm uygulamasından dinleyebilirsiniz. Çalışmamızın tamamı video çözümlüdür.

Tuğba BOSTANLIK, Mehtap ALTAY, Şimal ALTAY,  
Özge BALCI, Mehmet Şükrü KARAKAYA,  
Nurullah KILIÇ, Fatih ÖZKAN,  
Recep Hakan DÖNMEZ, Mehmet ÖZTÜRK,  
Mevlüt GÜVEN, Mehmet GÜLTEKİN, Fuat SES,  
Yusuf SEZGİN, Mikail KARACA, Hüseyin BOZKURT,  
Abdülislam AYDIN ve Kerem BULUT'a  
bu çalışmamızda bize verdikleri desteklerden dolayı  
teşekkür ederiz:

# Her yer orijinal olacak.

ORİJİNAL AİLESİ

# 1. BÖLÜM

- Ortalama Değişim Oranı / 4
  - Anlık Değişim Oranı / 6
    - Türev Tanımı / 12
  - Sabit Fonksiyonun Türevi / 18
- İki Fonksiyonun Toplamının ve Farkının Türevi / 21
- İki Fonksiyonun Çarpımı ve Bölümünün Türevi / 27
  - $(f(x))^n$  Biçimindeki Fonksiyonların Türevi / 35
    - Bileşke Fonksiyonun Türevi / 44
  - Bir Fonksiyonun İkinci Türevi / 53
    - Türev Süreklilik İlişkisi / 60
- Mutlak Değer ve Parçalı Fonksiyonların Türevi / 63
  - ÖSYM Tarzı Tarama Testleri / 75

## 2. BÖLÜM

- Türevin Geometrik Yorumu / 85
  - Türev Eğim İlişkisi / 89
- Teğet Normal Denklemi / 91
  - Rolle Teoremi / 108

## 3. BÖLÜM

- Artan Azalan Fonksiyonlar / 121
  - Ekstreum / 140
- ÖSYM Tarzı Tarama Testleri / 166
- Maksimum ve Minimum Problemleri / 176

## 4. BÖLÜM

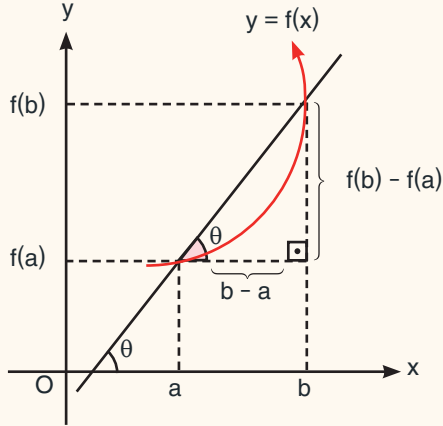
- ÖSYM Tarzı Tarama Testleri / 209



Sevgili öğrenciler,

bu konunun kavranması için 11. sınıfta görülen "fonksiyon değişim oranı" konusu hatırlanmalıdır.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin.



$f$  fonksiyonunun  $x = a$  ve  $x = b$  arasındaki ortalama değişim oranı:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan\theta \text{ olarak bulunur.}$$

Şimdi bir örnek ile pekiştirelim.

### ÖRNEK - 1

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f(x) = x^2 + 6$  fonksiyonunun  $x \in [2, 4]$  aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

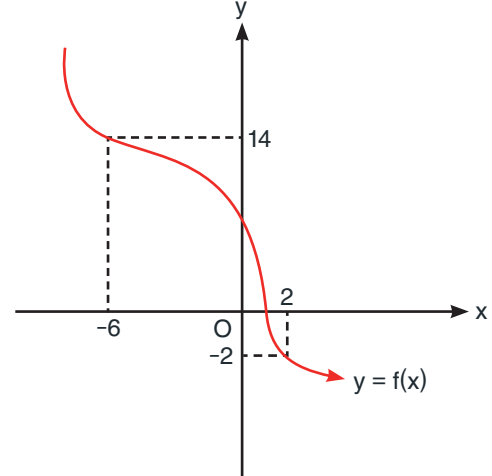
### ÇÖZÜM

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{(16 + 6) - (4 + 6)}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ bulunur.}$$

**Cevap:** 6

### ÖRNEK - 2

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$f$  fonksiyonunun  $x \in [-6, 2]$  aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

### ÇÖZÜM

$$\frac{f(2) - f(-6)}{2 - (-6)} = \frac{-2 - 14}{2 + 6} = \frac{-16}{8} = -2$$

**Cevap:** -2

Artık ortalama hızı çok rahat anlayabiliriz.

Otomobille bir yere giderken hep aynı hızla gitmezsiniz, bazen hızlı bazen yavaş gidersiniz.

Hız göstergesine bir anlık baktığınızda okuduğunuz değer **anlık hızı**, başladığımız yerden vardığımız yere kadar aldığımız yolun geçen süreye oranı **ortalama hızı** verecektir.

Trafikte yeşil dalga sistemi, belli bir ortalama hızla ilerleyen araçların trafik ışıklarında hep yeşil ışığı yakalamaları, kırmızı ışığa takılmamaları için düzenlenmiştir.

Ortalama hızı daha az ya da daha fazla olan araçlar ise kırmızı ışıklara takılır. Çünkü art arda gelen trafik ışıklarının zamanlanması belirlenen ortalama hızla göre hesaplanır.



## ÖRNEK - 3

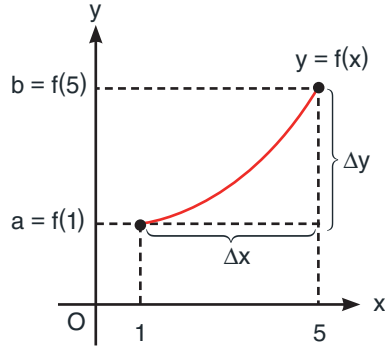
$f: [1, 5] \rightarrow [a, b]$  aralığında tanımlı

$$f(x) = x^2 + 4x + 7$$

**fonksiyonunun  $x \in [1, 5]$  aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?**

## ÇÖZÜM

Grafik ile gösterelim.



$$f(5) = 5^2 + 4 \cdot 5 + 7 = 52$$

$$f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 + 7 = 12$$

$$\text{Değişim oranı} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{52 - 12}{5 - 1} = 10$$

**Cevap: 10**

## ÖRNEK - 4

**Doğrusal hareket eden bir aracın konum - zaman denklemi**

$$s(t) = t^2 + 5t + 7$$

**olduğuna göre, 1. ve 5. saatler arasındaki değişim oranı kaçtır?** (konum: km, zaman: saat)

## ÇÖZÜM

Değişim oranı: Ortalama hız:  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\Delta s = s(5) - s(1) = (25 + 25 + 7) - (1 + 5 + 7) = 44 \text{ km}$$

$$\Delta t = 5 - 1 = 4 \text{ saat}$$

O hâlde

$$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{44}{4} = 11 \text{ km/s} \text{ bulunur.}$$

**Cevap: 11**

## ÖRNEK - 5

Aşağıdaki tabloda Karaman iline ait kasım ayının ilk haftasının sıcaklık değerleri verilmiştir.

Gün	1	2	3	4	5	6	7
Sıcaklık	20°C	16°C	14°C	6°C	8°C	14°C	12°C

**Buna göre, 1. ve 5. günler arasında hava sıcaklığındaki değişim oranı (hızı) kaç °C 'dir?**

## ÇÖZÜM

T: °C t: gün olsun.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(5) - T(1)}{5 - 1} = \frac{8 - 20}{4} = \frac{-12}{4} = -3^\circ\text{C}$$

**Cevap: -3**

## ÖRNEK - 6

**Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f(x) = x^3$  fonksiyonunun  $x \in [1, k]$  aralığındaki ortalama değişim oranı 7 ise k değeri kaçtır?**

## ÇÖZÜM

f fonksiyonunun  $[1, k]$  aralığındaki ortalama değişim

oranı  $\frac{f(k) - f(1)}{k - 1}$  formülü ile hesaplanır.

$$\frac{f(k) - f(1)}{k - 1} = \frac{k^3 - 1}{k - 1} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{(k - 1) \cdot (k^2 + k + 1)}{k - 1} = 7 \quad k^2 + k - 6 = 0$$

$(k + 3) \cdot (k - 2) = 0$  denkleminde  $k = -3$  ve  $k = 2$  bulunur.

$k > 1$  olduğundan  $k = 2$  olacaktır.

**Cevap: 2**



## ANLIK DEĞİŞİM HIZI

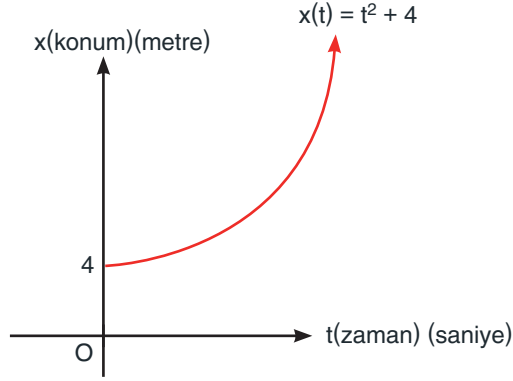
Ortalama hızın formülünü  $(V_{ort}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$  olarak görmüştük.

Hareketlinin  $t_1$  anındaki anlık hızını bulmak için  $t_2$  değeri  $t_1$ 'e yaklaşıırken fonksiyonun değişim oranı hesaplanmalıdır. Bu oran

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ limiti ile hesaplanır.}$$

## ÖRNEK - 7

Doğrusal hareket eden bir hareketliye ait konum zaman grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre, bu hareketlinin 2. saniyedeki anlık hızı kaç m/sn'dir?

## ÇÖZÜM

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{x(t) - x(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t^2 + 4) - (2^2 + 4)}{t - 2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2) \cdot (t+2)}{t-2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2} (t+2) = 4 \text{ m/sn}$$

Cevap: 4



## ORTALAMA HIZ ve ANLIK HIZ ARASINDAKİ FARK NEDİR?

- Ortalama hızla anlık hız arasındaki fark, hareket sırasında geçen zaman aralığının **büyüklüğüdür**. Ortalama hızda zaman aralığı nispeten büyüktür, aradaki hız değişimleri önemsenmez, toplam yer değiş-tirme toplam zaman aralığına bölünür.

Ortalama hız matematiksel olarak.

$$\vec{V}_{ortalama} = \frac{\vec{\Delta y}}{\Delta x}$$

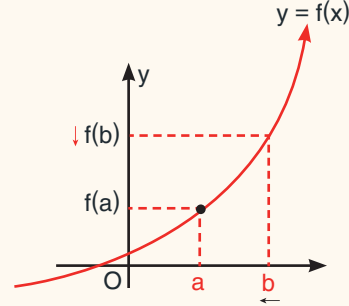
şeklinde gösterilir.

- Anlık hızda ise zaman aralığı çok küçüktür. Zaman aralığı o kadar küçüktür ki neredeyse sıfırdır ama tam olarak sıfır değildir.

$$\vec{V}_{ortalama} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta y}}{\Delta x}$$

Şimdi grafik üzerinde inceleyelim.

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



[a, b] aralığındaki ortalama değişim hızının  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  olduğunu biliyoruz.

b noktasını, a noktasına olabildiğince yaklaştırdığımızda f fonksiyonunun a noktasındaki anlık değişim oranını buluruz.

Anlık değişim oranını  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  limitinin değeri olarak tanımlayabiliriz.

Şimdi bu limiti başka türlü ifade edelim:

$b - a = h$  olsun. b olabildiğince a'ya yaklaştırdığımızda  $b - a$  değeri 0'a yaklaşacaktır. Yukarıda tanımladığımız anlık değişim oranında  $b = a + h$  yazalım.

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ olacaktır.}$$

O hâlde f fonksiyonunun a noktasındaki anlık değişim oranı:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

limitinin değerine eşittir.



## ÖRNEK - 8

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = x^2 + 5x$$

- $x \in [1, 4]$  aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?
- $x = 2$  noktasındaki anlık değişim oranı kaçtır?

## ÇÖZÜM

$$\text{a. } [1, 4] \text{ aralığındaki ortalama değişim oranı: } \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 + 20 - 1 - 5}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ bulunur.}$$

**Cevap: 10**

$$\text{b. } x = 2 \text{ noktasındaki anlık değişim hızı: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^2 + 5(h+2) - 14}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 + 5h + 10 - 14}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (h + 9)}{h} = 9$$

**Cevap: 9**

## ÖRNEK - 9

Düzgün doğrusal hareket eden bir aracın zamana bağlı yol denklemi,

$$s(t) = t^2 + 2t \quad (t: \text{saat}, s: \text{kilometre})$$

olarak veriliyor.

- Aracın  $t \in [1, 2]$  aralığındaki ortalama hızı kaç km'dir?
- $t = 2$  anında aracın hızı kaç kilometredir?

## ÇÖZÜM

$$\text{a. } [a, b] \text{ aralığındaki ortalama hız: } \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{4 + 4 - 3}{1} = 5 \text{ km/s 'dir.}$$

**Cevap: 5**

$$\text{b. } t = x_0 \text{ anındaki hız: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^2 + 2(h+2) - (4+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 + 2h + 4 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 6)}{h} = 6 \text{ km/s 'dir.}$$

**Cevap: 6**

## ÖRNEK - 10

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonu verilmiştir.

$$f(x) = x^3 + x$$

$f$  fonksiyonunun  $[0, 1]$  aralığındaki ortalama değişim oranı  $a$ ,  $x = 2$  noktasındaki anlık değişim oranı  $b$  olduğuna göre  $a + b$  toplamı kaçtır?

## ÇÖZÜM

$$[0, 1] \text{ aralığındaki ortalama değişim oranı: } a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$a = \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

$$x=2 \text{ noktasındaki anlık değişim hızı: } b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^3 + (h+2) - (8+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 12h + 8 + h + 2 - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 6h + 13)}{h} = 13$$

$$a = 2 \text{ ve } b = 13 \quad a + b = 15 \text{ bulunur.}$$

**Cevap: 15**

## ÖRNEK - 11

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f(x) = x^3$  fonksiyonunun  $x = k$  noktasındaki anlık değişim oranını bulunuz.

## ÇÖZÜM

$f$  fonksiyonunun  $x = k$  noktasındaki anlık değişim oranı

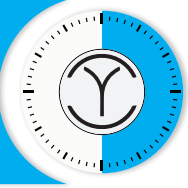
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} \text{ limiti ile hesaplanır.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(k+h)^3 - k^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^3 + 3k^2h + 3kh^2 + h^3 - k^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3k^2 + 3kh + h^2)}{h}$$

$$= 3k^2 \text{ bulunur.}$$

**Cevap:  $3k^2$**



### ÖRNEK - 12

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = -x^2 + k \cdot x$$

$f$  fonksiyonunun  $x=2$  noktasındaki anlık değişim oranı pozitif olduğuna göre  $k$ 'nin en geniş değer aralığını bulunuz.

### ÇÖZÜM

$x = 2$  noktasındaki anlık değişim oranı

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} > 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(h+2)^2 + k \cdot (h+2) - (-4 + 2k)}{h} > 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 4h - 4 + k \cdot h + 2k + 4 - 2k}{h} > 0$$

$$k - 4 > 0 \quad k > 4 \text{ olmalıdır.}$$

**Cevap:**  $(4, \infty)$

### ÖRNEK - 13



A şehrinden C şehrine doğrusal hareket ederek ulaşan bir aracın  $t$  saatte aldığı yol

$$s(t) = 4t^2 + 60t \text{ (km)}$$

fonksiyonu ile modellenmiştir.

AC yolu boyunca hız sınırının  $80 \text{ km/s}$  olduğu bilinmektedir.

**Aracın B'de bulunan radar noktasından geçip ceza yemediğine göre, araç AB yolunu kaç dakikada almış olabilir?**

(Hız ölçümü B noktasından geçtiği anda hesaplanmaktadır.)

### ÇÖZÜM

Araç B noktasından geçerken anlık hızı  $80 \text{ km/s}$  veya daha düşük bir hızla geçmelidir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq 80 \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cdot ((h+t)^2 + 15 \cdot (t+h)) - 4 \cdot (t^2 + 15t)}{h} \leq 80$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 + 15t + 15h - t^2 - 15t}{h} \leq 20$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2t + h + 15)}{h} \leq 20 \Rightarrow 2t \leq 5 \quad t \leq \frac{5}{2}$$

Araç B noktasından  $150 \text{ dk}$  veya daha erken bir sürede geçmelidir.

**Cevap:**  $t \leq 150$

### ÖRNEK - 14

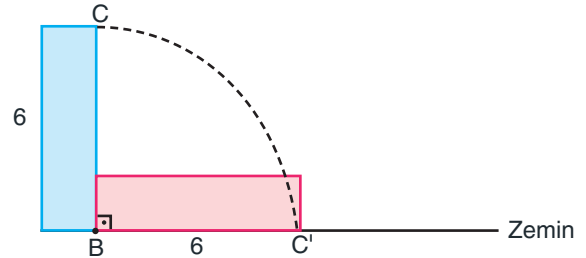


Dikdörtgen biçimindeki cisim B köşesinden zemine sabitlenmiştir.

Cisim zemine dik konumda iken ok yönünde devrilme hareketinden  $3$  saniye sonra C noktası zemine düşmüştür.

**$|AD| = 6$  metre olduğuna göre, C noktasının zemine düştüğü ana kadar geçen süredeki ortalama değişim hızı kaç metre/saniye'dir?**

### ÇÖZÜM



Öncelikle C noktasının zemine düşene kadar ne kadar yol aldığını bulalım. Yukarıdaki şekilden anlaşılacağı üzere C noktası yere düşene kadar bir çember yayı boyunca hareket edecektir.

$$\text{Çember yayının uzunluğunu hesaplayalım: } \frac{2\pi \cdot 6}{4} = 3\pi$$

Alınan yol  $3\pi$ , toplam geçen süre  $3$  saniye olduğundan ortalama hız  $\frac{3\pi}{3} = \pi \text{ m/s}$  olarak bulunur.

**Cevap:**  $\pi$







1. Düzgün doğrusal hareket eden bir hareketlinin  $t$  saniyede aldığı yol;

$$x(t) = 4t^2 + t \text{ (metre)}$$

fonksiyonu ile modellenmektedir.

**Hareketlinin  $[1, 3]$  aralığındaki ortalama hızı saniyede  $m$  metre ve  $t = 1$  anındaki hızı saniyede  $n$  metre olduğuna göre,  $\frac{m}{n}$  oranı kaçtır?**

- A) 1      B)  $\frac{3}{2}$       C)  $\frac{12}{5}$       D)  $\frac{13}{7}$       E)  $\frac{17}{9}$

2. Bir musluk boş bir havuzu doldurması için açılıyor.

Musluk, havuza  $t$  saatte

$$L(t) = 5t^2 + 2t \text{ (m}^3\text{)}$$

su doldurmuştur.

**Buna göre,  $L$  fonksiyonunun  $t = 2$  anındaki değişim hızı kaç  $\text{m}^3/\text{sa}$  olur?**

- A) 20      B) 22      C) 25      D) 28      E) 39

3.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  limiti bir gerçekte sayıya eşit ise bu sayıya  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  'daki anlık değişim oranı denir.

**Buna göre,  $f(x) = \sqrt{x} + 3$  fonksiyonunun  $x = 9$  'daki anlık değişim oranı kaçtır?**

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{5}$       E)  $\frac{1}{6}$

4. Gerçekte sayılarda tanımlı  $f$  fonksiyonu,

$$f(x) = x^2 + 5$$

biçiminde tanımlanıyor.

**Buna göre,  $[x, x + k]$  aralığındaki ortalama değişim oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir? ( $k \neq 0$ )**

- A)  $2x$       B)  $2x + k$       C)  $2xk + k^2$       D)  $k$       E)  $k^2$

5. Düzgün doğrusal hareket eden bir hareketlinin  $t$  saatte aldığı yol;

$$x(t) = 30t + t^2 \text{ (km)}$$

biçiminde veriliyor.

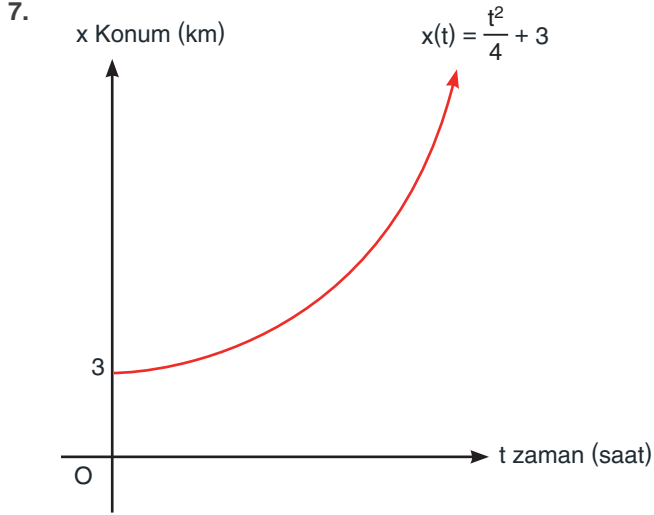
**Buna göre, bu hareketlinin  $[3, 5]$  aralığındaki ortalama hızı kaç  $\text{km}/\text{sa}$  olur?**

- A) 30      B) 34      C) 38      D) 40      E) 42

6. Gerçekte sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonunun  $[k, k + 3]$  ve  $[k + 3, k + 6]$  aralığındaki değişim oranı sırasıyla 12 ve 20'dir.

**Buna göre,  $f$  fonksiyonunun  $[k, k + 6]$  aralığındaki değişim oranı kaçtır?**

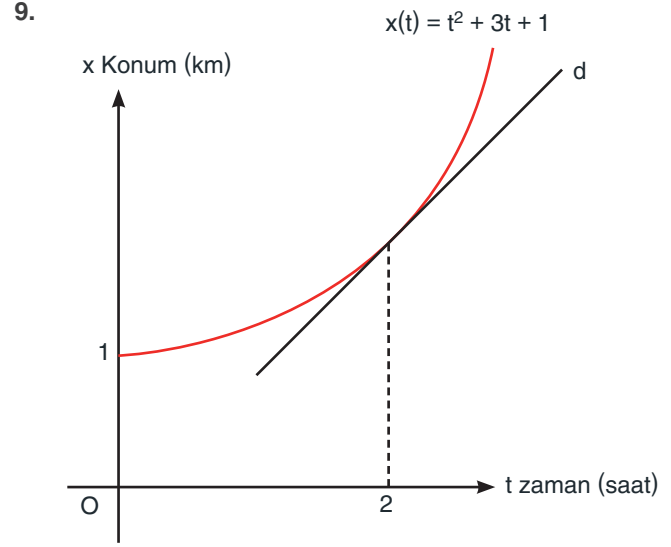
- A) 14      B) 15      C) 16      D) 18      E) 32



Yukarıdaki grafik bir aracın zamana bağlı olarak aldığı yolu göstermektedir.

**Bu grafiğe göre, aracın [2, 4] saat aralığındaki ortalama hızı kaç km/sa olur?**

- A)  $\frac{1}{2}$     B) 1    C)  $\frac{3}{2}$     D) 2    E)  $\frac{5}{2}$



Şekilde düzgün doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği ve t = 2 noktasından çizilen teğet verilmiştir.

$$x(t) = t^2 + 3t + 1 \quad (\text{metre})$$

**olduğuna göre, t = 2 anındaki değişim hızı kaç m/sn'dir?**

- A) 6    B) 7    C) 8    D) 9    E) 10

ORİJİNAL MATEMATİK

8. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu  
 $f(x) = x^2 - 3$   
 biçiminde tanımlanıyor.  
**Buna göre, f fonksiyonunun x = 4'teki anlık değişim oranı kaçtır?**  
 A) 5    B) 6    C) 7    D) 8    E) 9

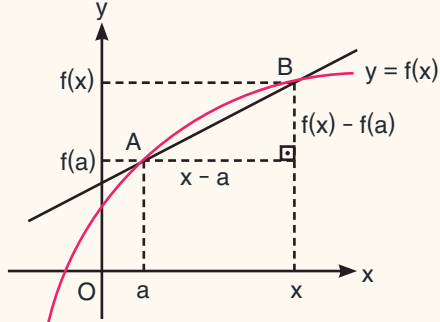
10. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu;  
 $f(x) = x^3 + 7$   
 biçiminde tanımlanıyor.  
**Buna göre, [-2, 1] aralığındaki değişim oranı kaçtır?**  
 A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 7

Cevap Anahtarı

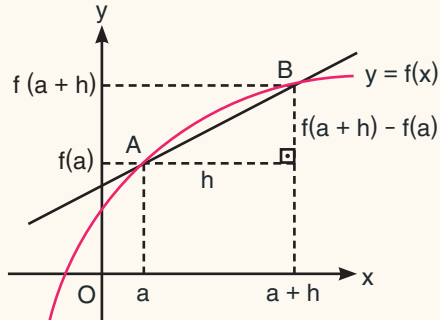
1.E	2.B	3.E	4.B
5.C	6.C	7.C	8.D
9.B	10.C		



Önceki ünite de anlatılan değişim oranına farklı bir bakış açısı aşağıda verilmiştir.



Fonksiyonun  $[a, x]$  aralığındaki değişim oranı  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 'dır.  $x = a + h$  alındığında ise



değişim oranı  $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  şeklinde hesaplanır.

- $h$ , küçük seçilerek sıfıra yaklaştırıldığında B noktası A noktasına yaklaşır.
- $h \rightarrow 0$  için limit durumunda B noktası A noktası ile çakışır ve AB doğrusu A noktasında  $y = f(x)$  eğrisine teğet olur.

### ► Tanım:

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  fonksiyonu  $a \in A$ 'da sürekli olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  limiti bir gerçel sayıya eşit ise, bu limit değerine  $f$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki türevi denir.

$f'(a)$ ,  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$  ile gösterilir.

Buna göre,

$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 'dır. Bu ifadeye **türevin limit tanımı** denir. Dięer bir ifade ile,

$x - a = h$  alınırsa  $x \rightarrow a$  için  $h \rightarrow 0$  olur. Bu durumda tanım

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  şeklinde ifade edilir.

### ÖRNEK - 1

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun  $x = 3$  noktasındaki türevi kaçtır?

### ÇÖZÜM

1. Yol:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

2. Yol

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Cevap: 6

### ÖRNEK - 2

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve  $x = 5$  noktasında türevlenebilir  $f$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x^2 - 25}$$

limitinin değeri kaçtır?

### ÇÖZÜM

Limit özelliklerini hatırlayalım.

$$\begin{aligned} \left( \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] \right) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{(x - 5)(x + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \cdot \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x + 5} \\ &= f'(5) \cdot \frac{1}{10} = \frac{f'(5)}{10} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Cevap:  $\frac{f'(5)}{10}$



## ÖRNEK - 3

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilen  $f$  fonksiyonu için

$$f'(1) = 6$$

olduğuna göre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 3h}$$

limitinin değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

Türevin tanımına göre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \text{ 'dir.}$$

Buna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+3}$$

$$f'(1) \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ olur.}$$

Cevap: 2

## ÖRNEK - 4

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilir  $f$  fonksiyonu için

$$f'(4) = 6$$

olduğuna göre,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h+4) - f(4)}{3h}$  limitinin değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

Türevin tanımından hareketle

$$k = 2h \text{ olsun.}$$

$$h \rightarrow 0 \text{ ise } k \rightarrow 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(4+k) - f(4)}{\frac{3k}{2}}$$

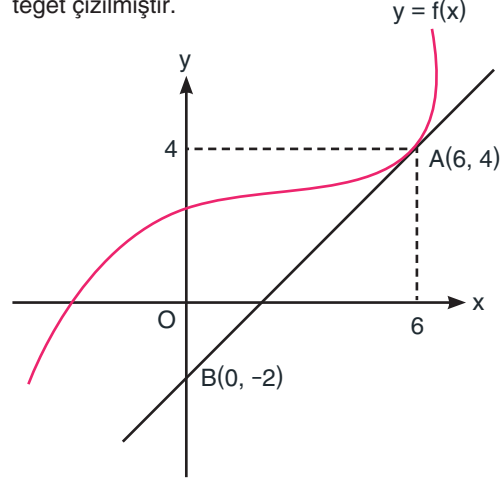
$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(4+k) - f(4)}{k}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot f'(4) = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ olur.}$$

Cevap: 4

## ÖRNEK - 5

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonunun grafiğine, üzerindeki  $x = 6$  apsisi noktadan teğet çizilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{f(6) - f(6+h)} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

## ÇÖZÜM

$f$  fonksiyonunun herhangi bir noktasından çizilen teğetin eğimi, o noktadaki türev değerine eşittir.

$A(6, 4)$  ve  $B(0, -2)$  noktalarından  $AB$  doğrusunun eğimini bulalım.

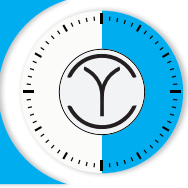
$$\text{Eğim}_{AB} = \frac{-2 - 4}{0 - 6} = 1 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda  $f'(6) = 1$ 'dir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{f(6) - f(6+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\frac{f(6) - f(6+h)}{h}}$$

$$\frac{-3}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h}} = \frac{-3}{f'(6)} = -3 \text{ olur.}$$

Cevap: -3



### ÖRNEK - 6

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonu için  $f'(1) = 5$ 'tir.

**Buna göre,**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-5h)}{2h}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

### ÇÖZÜM

$f(1)$  ekleyip çıkaralım.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-5h)}{2h}$$

$3h = m$  ve  $-5h = n$  olsun.

$h \rightarrow 0$  için  $m \rightarrow 0$  ve  $n \rightarrow 0$ 'dır.

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{m \rightarrow 0} \frac{f(1+m) - f(1)}{\frac{m}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(1+n) - f(1)}{\frac{-n}{5}}$$

$$\frac{3}{2} \cdot f'(1) + \frac{5}{2} \cdot f'(1) = 4 \cdot f'(1)$$

$f'(1) = 5$  olduğu için

$$4 \cdot f'(1) = 4 \cdot 5 = 20 \text{ olur.}$$

**Cevap: 20**

### ÖRNEK - 7

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right)$$

**fonksiyonu için  $f'(1)$  kaçtır?**

### ÇÖZÜM

$f(x)$  fonksiyonunu

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2} \cdot \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^4} \text{ şeklinde düzenleyelim.}$$

Türev tanımından:

$$f'(1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^6 - 1}{x^4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^4 \cdot (x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x^4 \cdot (x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4} = 6 \text{ olur.}$$

**Cevap: 6**

### ÖRNEK - 8

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilen  $f$  fonksiyonunda

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

**olduğuna göre,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{f(1) - f(x)}$  limitinin değeri kaçtır?**

### ÇÖZÜM

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{f(1) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)}{-1(f(x) - f(1))}$$

Şeklinde düzenleyip türev tanımı uygulayalım.

$$-4 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{f(1) - f(x)}{x - 1}} = \frac{-4}{f'(1)}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{f(1) - f(x)} = \frac{-4}{\frac{1}{2}} = -8 \text{ olur.}$$

**Cevap: -8**

### ÖRNEK - 9

$n$  pozitif tam sayı olmak üzere gerçel sayılar kümesi üzerindeki tanımlı ve türevlenebilir  $f$  fonksiyonu  $f(x) = x^n$  olduğuna göre  $f'(1)$  kaçtır?

### ÇÖZÜM

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$x^n - 1 = (x - 1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  olduğunu hatırlayalım.

lim.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ tane}} = n \text{ olur.}$$

**Cevap: n**





1.  $x = 1$  noktasında türevli  $y = f(x)$  fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1}$$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $\frac{f'(1)}{2}$  B)  $2 \cdot f'(1)$  C)  $\frac{f'(1)}{3}$  D)  $3 \cdot f'(1)$  E)  $f'(1)$

2.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{4h}$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $-f'(x)$  B)  $2 \cdot f'(x)$  C)  $f'(x)$  D)  $\frac{2}{3} \cdot f'(x)$  E)  $\frac{f'(x)}{2}$

3. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı  $f$  fonksiyonu

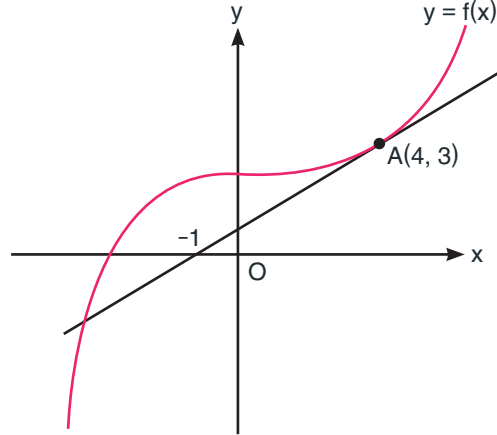
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

olduğuna göre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{2h} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) -6 B) -5 C) -4 D) 4 E) 8

- 4.



Şekilde  $f$  fonksiyonunu, üzerindeki  $A(4, 3)$  noktasından çizilen teğet  $x$  eksenini  $(-1, 0)$  noktasında kesmektedir.

Buna göre,  $\frac{f(4)}{f'(4)}$  oranı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve her noktada türevli  $f$  fonksiyonu için  $f'(1) = \frac{2}{3}$  olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5





6. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu için

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 5$$

olduğuna göre  $f'(2)$  kaçtır?

- A) 8      B) 9      C) 10      D) 11      E) 12

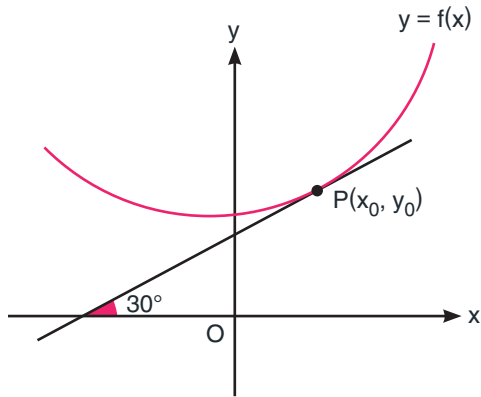
7.  $f(x) = x^2 + 1$  fonksiyonu için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + 2h) - f(3 - h)}{h}$$

limitinin sonucu kaçtır?

- A) 15      B) 16      C) 17      D) 18      E) 19

- 8.



Şekilde  $f$  fonksiyonu üzerindeki  $P(x_0, y_0)$  noktasından çizilen teğet doğrusu  $x$  eksenine  $30^\circ$  'lik açı oluşturmaktadır.

Buna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 6h) - f(x_0)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\sqrt{3}$       C)  $\frac{3}{2}$       D)  $2\sqrt{3}$       E) 6

9. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilen

$$f(x) = x^4 - mx^2 + 15$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 8$$

olduğuna göre  $m$  değeri kaçtır?

- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 8

10. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve her noktada türevli  $f$  fonksiyonu için

$$f(-1) = \frac{3}{2} \text{ ve } f'(-1) = 12$$

olduğuna göre

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^2(x) - f^2(-1)}{x + 1}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 20      B) 24      C) 28      D) 30      E) 36

11. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilen  $f$  fonksiyonu için

$$f'(0) = \frac{5}{2}$$

olduğuna göre

$$\lim_{h \rightarrow 2} \frac{f(3h - 6) - f(2 - h)}{h - 2}$$

limitinin değeri kaçtır?

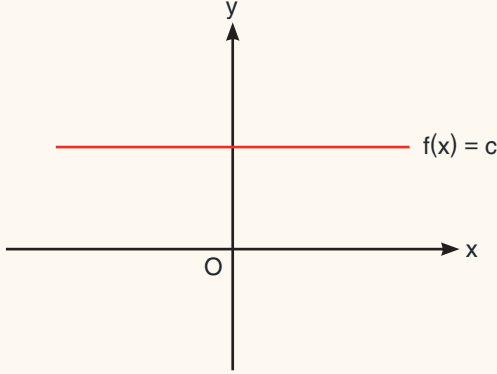
- A) 6      B) 8      C) 9      D) 10      E) 12

## Cevap Anahtarı

1.C	2.E	3.C	4.D	5.B	6.D
7.D	8.D	9.D	10.E	11.D	



$c$  gerçel sayı,  $f(x) = c$  ise  $f'(x) = 0$ 'dır.



$f(x) = c$  fonksiyonunun grafiği incelendiğinde  $x$  eksenine paralel olduğu görülür. Dolayısıyla eğimi  $0$ 'dır.

$$m = \frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ olur.}$$

### ÖRNEK - 1

$f(x) = 2043^2$  olduğuna göre  $f'(x)$  değeri kaçtır?

### ÇÖZÜM

$f$  sabit fonksiyon olduğundan her noktadaki türevi  $0$ 'a eşittir.

$$f'(x) = 0 \text{ 'dır.}$$

**Cevap:** 0

### ÖRNEK - 2

$a$  ve  $b$  gerçel sayı olmak üzere,

$f(x) = a^2 + b^2 + a \cdot b + 1$  fonksiyonu için  $f'(0) + f'(1)$  işleminin sonucu kaçtır?

### ÇÖZÜM

$f$ ,  $x$  değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğundan dolayı  $f(x) = a^2 + b^2 + a \cdot b + 1$  fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Sabit fonksiyonun her noktadaki türevi  $0$ 'dır.

$$f'(0) = 0 \text{ ve } f'(1) = 0, \quad 0 + 0 = 0 \text{ 'dır.}$$

**Cevap:** 0

$$f(x) = x^n \text{ ise } f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

### ÖRNEK - 3

$f(x) = x^7$  olduğuna göre  $f'(x)$  türev fonksiyonunu bulunuz.

### ÇÖZÜM

$$f(x) = x^7 \text{ ise } f'(x) = 7 \cdot x^{7-1} \\ = 7 \cdot x^6 \text{ olarak bulunur.}$$

**Cevap:**  $7x^6$

### ÖRNEK - 4

$f(x) = 7 \cdot x^5$  olduğuna göre  $f'(x)$  türev fonksiyonunu bulunuz.

### ÇÖZÜM

$$f(x) = 7x^5 \text{ ise } f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot x^{5-1} \\ = 35 \cdot x^4 \text{ olarak bulunur.}$$

**Cevap:**  $35x^4$

### ÖRNEK - 5

$f(x) = 5 \cdot x$  olduğuna göre  $f'(x)$  türev fonksiyonunu bulunuz.

### ÇÖZÜM

$$f(x) = 5 \cdot x \text{ ise } f'(x) = 5 \cdot 1 \\ = 5 \text{ olarak bulunur.}$$

**Cevap:** 5



## ÖRNEK - 6

$f(x) = 4 \cdot x^2$  olduğuna göre,  $f'(3)$  değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

$f(x) = 4 \cdot x^2$  ise  $f'(x) = 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1}$   
 $f'(3) = 8 \cdot 3 = 24$  olarak bulunur.

**Cevap:** 24

## ÖRNEK - 7

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$  olduğuna göre,  $f'(1)$  değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$  buradan  $f(x) = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$  olur.

$f'(x) = \frac{1}{6} x^{\frac{1}{6}-1}$   $f'(1) = \frac{1}{6}$  bulunur.

**Cevap:**  $\frac{1}{6}$

## ÖRNEK - 8

$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$  olmak üzere  $f'(8)$  değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$  ise  $f(x) = x \cdot x^{\frac{1}{3}}$   
 $f(x) = x^{1+\frac{1}{3}}$  buradan  $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$  olarak yazılabilir.

Şimdi türev alma işlemine geçelim:

$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1}$ ,  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}$  tür.

$f'(8) = \frac{4}{3} \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}}$

$f'(8) = \frac{8}{3}$  bulunur.

**Cevap:**  $\frac{8}{3}$

## ÖRNEK - 9

$f(x) = x^{-2}$  olduğuna göre  $f'(k) = -16$  ise  $k$  değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

$f(x) = x^{-2}$  ise  $f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1}$   
 $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$ ,  $f'(k) = -2 \cdot \frac{1}{k^3} = -16$   
 $k^3 = \frac{1}{8}$   $k = \frac{1}{2}$  bulunur.

**Cevap:**  $\frac{1}{2}$

## ÖRNEK - 10

$a$  pozitif tam sayı olmak üzere,

$f(x) = x^a$  ve  $g(x) = x^{2a}$  fonksiyonları için

$\frac{f'(1)}{g'(-1)}$  değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$  ve  $g'(x) = 2a \cdot x^{2a-1}$  olur.

$f'(1) = a$  ve  $g'(-1) = -2a$  bulunur.

$\frac{f'(1)}{g'(-1)} = \frac{-1}{2}$  bulunur.

**Cevap:**  $-\frac{1}{2}$

## ÖRNEK - 11

$n$  pozitif tam sayı ve  $f(x) = n \cdot x^n$  fonksiyonu için

$f'(1) \cdot f'(2) = 32$  olduğuna göre,  $n$  değeri kaçtır?

## ÇÖZÜM

$f(x) = n \cdot x^n$  ise  $f'(x) = n^2 \cdot x^{n-1}$  olarak bulunur.

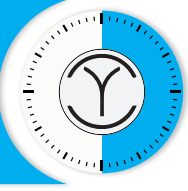
Buna göre,

$f'(1) = n^2 \cdot 1 = n^2$ ,  $f'(2) = n^2 \cdot 2^{n-1}$

$f'(1) \cdot f'(2) = n^4 \cdot 2^{n-1} = 32$

olduğundan  $n = 2$  olarak bulunur.

**Cevap:** 2



### ÖRNEK - 12

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^n}{n+1} \text{ biçiminde tanımlanıyor.}$$

n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^2 f'(k) = \frac{3n}{n+1} \text{ olduğuna göre n değeri kaçtır?}$$

### ÇÖZÜM

f fonksiyonunun türevini bulalım.

$$f'(x) = \frac{n}{n+1} \cdot x^{n-1}, f'(1) = \frac{n}{n+1} \text{ ve } f'(2) = \frac{n}{n+1} \cdot 2^{n-1} \text{ 'dir.}$$

$$\sum_{k=1}^2 f'(k) = f'(1) + f'(2)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot 2^{n-1} = \frac{3n}{n+1}$$

$$1 + 2^{n-1} = 3$$

$$2^{n-1} = 2 \quad n = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

**Cevap: 2**

### ÖRNEK - 13

n pozitif tam sayı olmak üzere

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{n+1} \text{ biçiminde tanımlanıyor.}$$

Buna göre,  $\sum_{n=1}^{100} f_n'(1)$  toplamının değeri kaçtır?

### ÇÖZÜM

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$f_n'(1) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \text{ olacaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \left( \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ olduğundan yukarıdaki}$$

ifadeyi tekrar düzenleyelim.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101}$$

$$= \frac{100}{101} \text{ olarak bulunur.}$$

**Cevap:  $\frac{100}{101}$**

### ÖRNEK - 14

n, 1'den büyük bir tam sayı olmak üzere

gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \text{ biçiminde tanımlanıyor.}$$

$$f'(1) = \frac{5-n}{6}$$

olduğuna göre n değeri kaçtır?

### ÇÖZÜM

f fonksiyonu gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı olduğuna göre n değeri tek sayı olmalıdır.

f fonksiyonunu düzenleyelim:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \text{ ifadesinin türevi alındığında,}$$

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \text{ buradan}$$

$$f'(1) = \frac{1}{n} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{5-n}{6} \Rightarrow 5n - n^2 = 6 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 0$$

denklemini çözersek n = 2 veya n = 3 bulunur.

n tek sayı olduğuna göre n = 3 olur.

**Cevap: 3**